***Exercice* 1**

Déterminer la formulation forte du problème de la flexion d'une poutre (théorie de Bernoulli-Euler), caractérisée par la fonctionnelle et les conditions aux limites

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} [EI(\mathrm{d}^2 w/\mathrm{d}x^2)^2 - 2pw]\,\mathrm{d}x - w(\ell)P$$

$$w(0) = (\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)\big|_{x=0} = 0$$

où $w(x)$ désigne le déplacement transversal de la poutre, E est le module d'élasticité du matériau, ℓ dénote la longueur de la poutre et I représente le moment d'inertie de la section de la poutre, tandis que les grandeurs p et P sont respectivement une charge répartie et une force ponctuelle. Rechercher la forme faible et définir les classes de fonctions admissibles pour les déplacements réel et virtuel.

***Exercice* 2**

Démontrer que l'erreur $e^h = u - u^h$ entre la solution exacte u d'un problème unidimensionnel régulier et son approximation u^h au moyen d'éléments finis à deux nœuds (fonctions de forme linéaires par morceaux) suit l'estimation *a priori* suivante

$$\|e^h\|_0 \equiv \left[\int_0^{\ell} (e^h)^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \leq C_0\, h^2 \qquad \text{avec} \quad h = \max_e {}^e\ell$$

où h est la longueur caractéristique du réseau d'éléments finis, correspondant à la plus grande des distances ${}^e\ell$ entre deux nœuds d'un élément, et C_0 dénote le facteur de convergence.